Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Cadeias de Markov em tempo contínuo ($\mathcal{S}$ enumerável)

Processos de salto (não necessariamente Markoviano):
processo passa períodos de tempo numa sucessão de estados; ao final de cada visita a dado estado, salta para o próximo estado.

Trajetórias contínuas/constantes à direita.
Distribuição de $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ determinada pelas distribuições finito dimensionais

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n),\ 0 \le t_1 < \cdots < t_n,\ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S},\ n \ge 1.$$

Ex. Dado $x \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_t = x \text{ para algum } t \ge 0) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{x_1,\ldots,x_n \neq x} \mathbb{P}(X_{q_1} = x_1, \ldots, X_{q_n} = x_n), \end{aligned}$$

onde $q_1, q_2 \ldots$ é uma enumeração dos números racionais.

Processo de saltos

Seja T_i o tempo gasto na i-ésima visita do processo, $i = 1, 2, \ldots$;

$T_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ = tempo do n-ésimo salto do processo, $n = 1, 2, \ldots$;

$S_0 = 0$.

$[S_{n-1}, S_n)$ ... intervalo de duração da n-ésima visita do processo, $n \geq 1$.

Seja $Y_n = X_{S_n}$, $n \geq 0$. Então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1}, \ n \geq 0. \tag{1}$$

$(Y_n)_{n \geq 0}$: cadeia de saltos de (X_t).

Processo de saltos (cont)

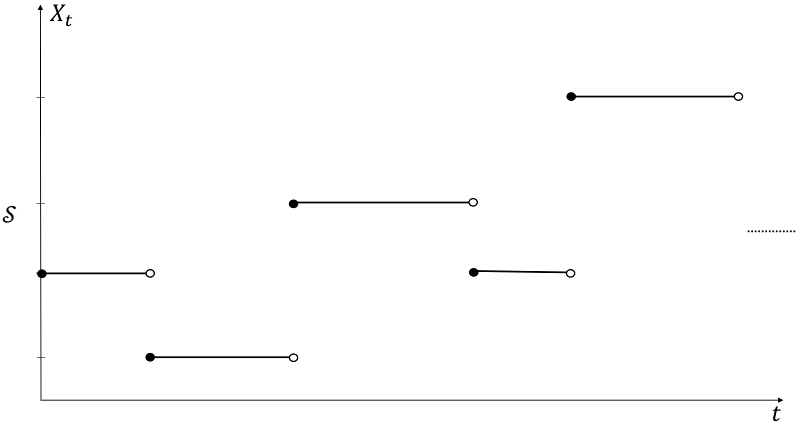
Há 3 possíveis comportamentos:

1) $S_n < \infty$ para todo $n \geq 1$ e $S_n \to \infty$ qdo $n \to \infty$.
Então (X_t) está bem definido para todo $t \geq 0$.

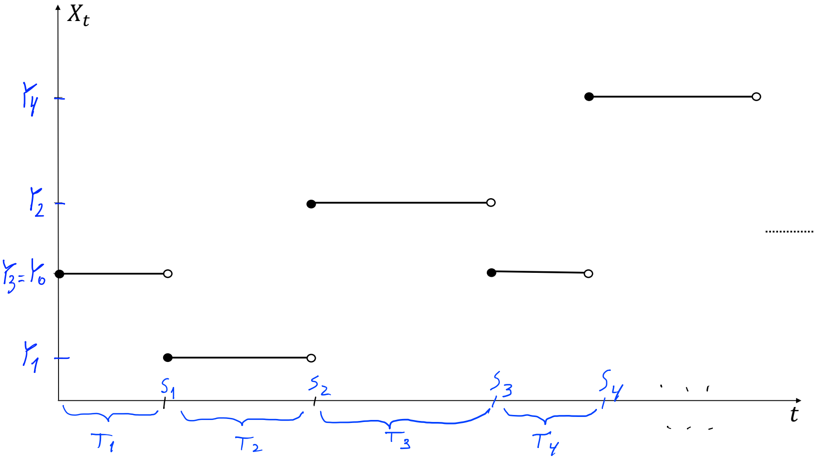
2) $T_i = \infty$ para algum $i \geq 1$. Seja $n^* = \min\{i \geq 1 : \; T_i = \infty\}$.
Então $S_{n^*-1} < \infty$ e $S_{n^*} = \infty$, e (1) tb funciona; podemos tomar $n < n^*$.

3) $S_n \to \zeta < \infty$ qdo $n \to \infty$. Neste caso, o processo dá um número infinito de saltos em tempo finito, e (1) define (X_t) para $t \in [0, \zeta)$. E depois?
Uma saída é adicionar um ponto a $\mathcal{S}$, digamos ∞, e fazer $X_t = \infty$ para $t \geq \zeta$.
Este é o chamado *processo mínimo* (associado a (Y_n) e (T_i)).

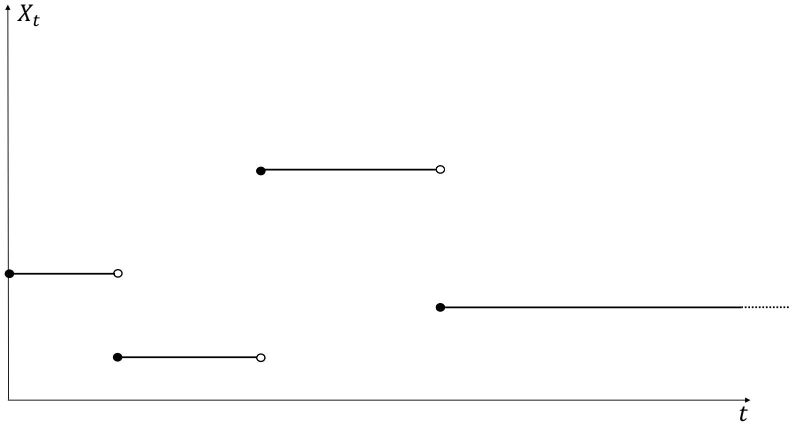
Ilustrações — Comportamento 1



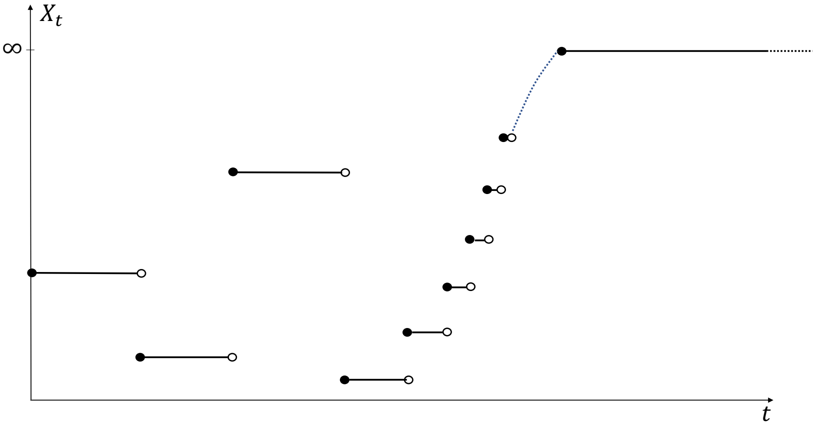
Ilustrações — Comportamento 1 (cont.)



Ilustrações — Comportamento 2



Ilustrações — Comportamento 3



Propriedade de Markov

De novo, imporemos: dados $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ e $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \,|\, X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = \mathbb{P}_{x_n}(X_{t_{n+1}-t_n} = x_{n+1}). \qquad (2)$$

Notemos que, dados $x \in \mathcal{S}$ e $s, t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_1 > t + s | T_1 > t) &= \mathbb{P}_x(X_{t+r} = x \ \forall \ r \in [0, s] | X_r = x \ \forall \ r \in [0, t]) \\ &\overset{(2)}{=} \mathbb{P}_x(X_r = x \ \forall \ r \in [0, s]) = \mathbb{P}_x(T_1 > s). \qquad (3) \end{aligned}$$

Dizemos que T_1 exibe *falta de memória*. Veremos abaixo que isto restringe a distribuição de T_1 a uma forma específica, a *exponencial*.

Obs. Segue igualmente de (2) que (Y_n) também tem a propriedade de Markov e homogeneidade temporal, como a cadeia em tempo discreto. Além disto, $T_2, T_3, \ldots$ também exibem (marginalmente) falta de memória, e, dada (Y_n), $T_1, T_2, \ldots$ são independentes.

Distribuição exponencial

(Ingrediente essencial das CMTC)

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$: $f(t) = f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$

$\mathbb{P}(T > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = \int_{\lambda t}^\infty e^{-r} dr = -e^{-r}\Big|_{\lambda t}^\infty = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

(Também admitiremos $\lambda = 0$: $T \sim \text{Exp}(0)$: $\mathbb{P}(T = \infty) = 1$)

$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

$\mathbb{E}(e^{-T}) = \int_0^\infty e^{-t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{1+\lambda} \int_0^\infty (1+\lambda)\, e^{-(1+\lambda)t} dt = \frac{\lambda}{1+\lambda}$

Teorema 1 (Falta de memória)

Uma v.a. não negativa apresenta *falta de memória*, i.e.,

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \mathbb{P}(T > t)\ \forall\ s, t \geq 0, \tag{4}$$

se e somente se $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ para algum $\lambda \geq 0$.

Dem. do Teorema 1

$(\Leftarrow)$ I.e. $(4) = \frac{\mathbb{P}(T>t+s)}{\mathbb{P}(T>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} =$ I.d. (4)

$(\Rightarrow)$ $(4) \Leftrightarrow \mathbb{P}(T > t+s) = \mathbb{P}(T > t)\,\mathbb{P}(T > s)\ \forall\ s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > kr) &= \mathbb{P}(T > (k-1)r)\,\mathbb{P}(T > r),\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{R}^+ \\ &= \mathbb{P}(T > (k-2)r)\,[\mathbb{P}(T > r)]^2 = \cdots = [\mathbb{P}(T > r)]^k \qquad (5) \end{aligned}$$

Escolhendo $k = n$ e $r = \frac{1}{n}$ em (5):

$$\mathbb{P}(T > 1) = \left[\mathbb{P}\left(T > \tfrac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow \mathbb{P}\left(T > \tfrac{1}{n}\right) = \left[\mathbb{P}(T > 1)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (6)$$

Tomando $q = k/n$, $k, n \in \mathbb{N}$, de (5) e (6):

$$\mathbb{P}(T > q) = \left[\mathbb{P}\left(T > \tfrac{1}{n}\right)\right]^k = [\mathbb{P}(T > 1)]^{\frac{k}{n}} = [\mathbb{P}(T > 1)]^q \qquad (7)$$

Dem do Teorema 1 (cont)

Fazendo $\lambda = -\log \mathbb{P}(T > 1)$, segue que $\mathbb{P}(T > 1) = e^{-\lambda}$, e de (7)

$$\mathbb{P}(T > q) = e^{-\lambda q},\ q \in \mathbb{Q}^+ = \text{números racionais positivos.} \tag{8}$$

Dado $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, sejam $q_1, \ldots, q_n \leq t \leq \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, tais que

$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{q}_n = t$, e de (8)

$$e^{-\lambda \tilde{q}_n} = \mathbb{P}(T > \tilde{q}_n) \leq \mathbb{P}(T > t) \leq \mathbb{P}(T > q_n) = e^{-\lambda q_n}$$

Tomando limites:

$$e^{-\lambda t} = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda \tilde{q}_n} \leq \mathbb{P}(T > t) \leq \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda q_n} = e^{-\lambda t} \qquad \square$$

Teorema 2

Sejam $T_1, T_2, \ldots$ v.a.'s independentes tais que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, e façamos $S = \sum_{i=1}^{\infty} T_i$. Temos que

$S \overset{qc}{<} \infty$ se e somente se $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(T_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$.

Dem. $(\Leftarrow)$ Claro

$$\begin{aligned}(\Rightarrow)\ \mathbb{E}(e^{-S}) &= \mathbb{E}(e^{-\sum_{i=1}^{\infty} T_i}) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n} T_i}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-\sum_{i=1}^{n} T_i}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{-T_i}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right) \right\}^{-1} \\ &= 0, \text{ se } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty;\end{aligned}$$

neste caso, $e^{-S} = 0$ qc $\Rightarrow S = \infty$ qc $\square$

Teorema 3

Sejam $T_1, T_2, \ldots$ v.a.'s independentes tais que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$.
Suponha que $0 < \lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$, e seja $T = \inf_{i \geq 1} T_i$.
Então, o inf é qc atingido em um único índice K.
Além disto, K e T são independentes, $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ e

$$\mathbb{P}(K = \ell) = \frac{\lambda_\ell}{\lambda},\ \ell \geq 1.$$

Dem. $\mathbb{P}(\overbrace{T_\ell > t;\ T_i > T_\ell,\ i \neq \ell}^{A_t^\ell}) = \int_t^\infty f_{T_\ell}(s) \prod_{i \neq \ell} \mathbb{P}(T_i > s)\, ds$

$$= \frac{\lambda_\ell}{\lambda} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} \frac{\lambda_\ell}{\lambda} \tag{9}$$

Sendo $\mathbb{P}(A_0^\ell) = \frac{\lambda_\ell}{\lambda}$, temos que $\mathbb{P}(\cup_{\ell \geq 1} A_0^\ell) = \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}(A_0^\ell) = 1$, e notemos que inf é único em $\cup_{\ell \geq 1} A_0^\ell$. Logo

$$\mathbb{P}(A_t^\ell) = \mathbb{P}(T > t, K = \ell)$$

e a independência segue da fatoração em (9). $\square$